

Lista 1 (Własności liczb całkowitych, kongruencje)

Zad. 1. Niech $a, b, c, d \in Z$. Udowodnić następujące implikacje:

a) $a|b \Rightarrow a|bc$;

b) $a|b$ i $a|c \Rightarrow a|b + c$;

c) $a|b$ i $c|d \Rightarrow ac|bd$;

d) $[(a, b) = 1$ i $a|c$ i $b|c] \Rightarrow ab|c$. Pokazać, że jeśli $(a, b) \neq 1$ to implikacja nie jest prawdziwa.

Zad.2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnić:

a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, dla $n \in N$;

b) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, dla $n \in N$;

c) $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, jeśli $r \neq 0$, $r \neq 1$ oraz $n \in N$;

d) $\sum_{i=0}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$, dla $n \in N$;

e) $5|n^5 - n$, dla $n \in N$ i $n \geq 2$;

f) $10|3^{85} - 3^{17}$;

g) $6|n^3 - n$, dla $n \in N$ i $n \geq 2$;

h) $6|8^n - 2^n$, dla $n \in N$.

Zad.3. Korzystając z algorytmu Euklidesa znaleźć NWD podanych par liczb, a następnie przedstawić go w postaci kombinacji tych liczb (tzn. $(a, b) = ax + by$, $x, y \in Z$):

a) $a = 20$, $b = 14$;

b) $a = 72$, $b = 17$;

c) $a = 320$, $b = 30$;

d) $a = 14259$, $b = 3521$

e) $a = 8359$, $b = 9373$.

Zad.4. Oblicz:

a) $5 +_7 6$; b) $4 \cdot_7 4$; c) $6 \cdot_{10} 7$.

Zad.5. Wypisz tabliczki dodawania i mnożenia w zbiorze Z_5 .

Zad. 6 Korzystając z własności funkcji Eulera obliczyć: $\varphi(55)$, $\varphi(125)$, $\varphi(375)$.

Zad. 7 Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$14x + 28y = 39.$$

Zad. 8 Rozwiązać w liczbach całkowitych następujące równanie

$$42823x + 6409y = 68.$$

Zad. 9 Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby 541^{541} przez 37.

Zad. 10 Czy istnieje liczba całkowita x spełniająca układ równań

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5}, \\ x &\equiv 6 \pmod{8}, \\ x &\equiv 2 \pmod{7}, \\ x &\equiv 3 \pmod{11}? \end{aligned}$$

Zad. 11 Kapral przygotowuje oddział liczący mniej niż 3583 ale więcej niż 3513 żołnierzy do defilady. Gdy ustawi go piątkami, zawsze zostaje mu trzech żołnierzy. Gdy ustawi go siódmkami, to zawsze brakuje jednego żołnierza do pełnej siódemki. Ile osób liczy oddział?

Zad. 12 Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000} ?

Zad. 13 Wyznaczyć wszystkie pierwiastki kongruencji

$$x^3 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Zad. 14 Policzyc $16^{43} \pmod{25}$.

Zad. 15 Rozwiązać kongruencję

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Zad. 16 Czy prawdą jest, że:

$$5^{1984} \equiv 1983 \pmod{25}.$$

Zad. 17 Wyznaczyć dwie ostatnie cyfry liczby 7^{6042} .